

# Weak Variable-Length Slepian-Wolf Coding with Linked Encoders for Mixed Sources

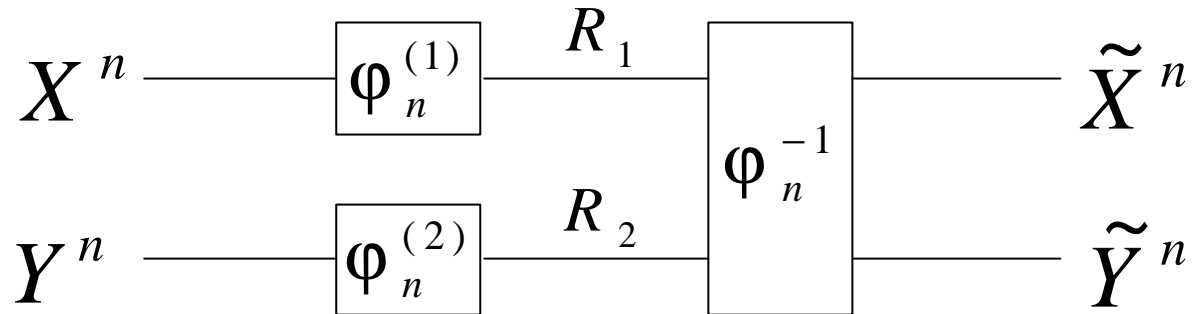
Akisato Kimura  
木村 昭悟

Advisor : Tomohiko Uyematsu

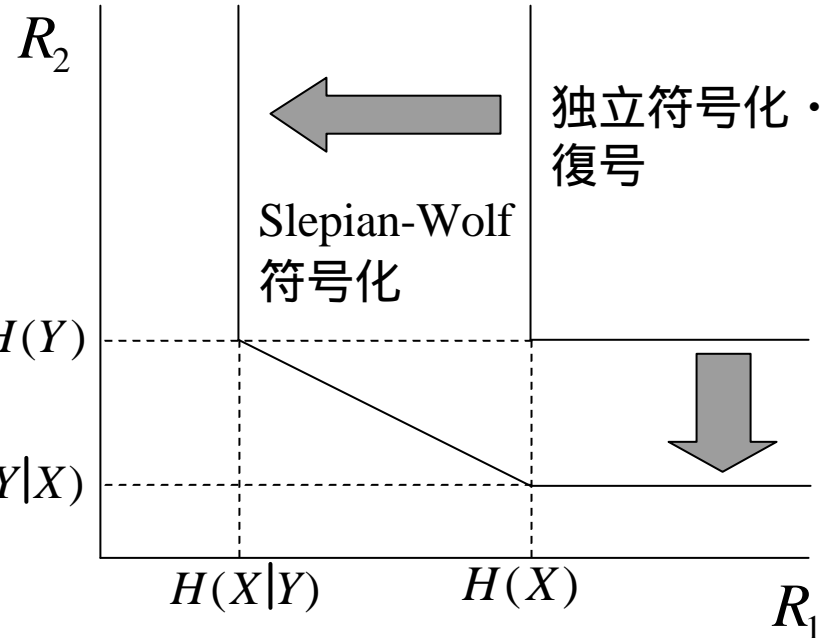
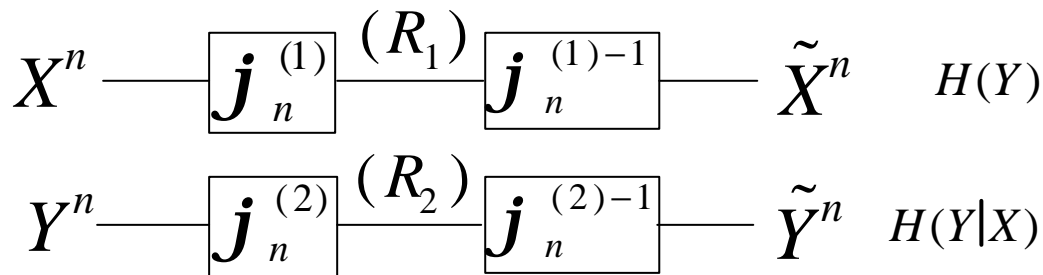
Dept. of Electrical and Electronic Eng.  
Tokyo Institute of Technology

# Introduction (1)

- Slepian and Wolf (1973)

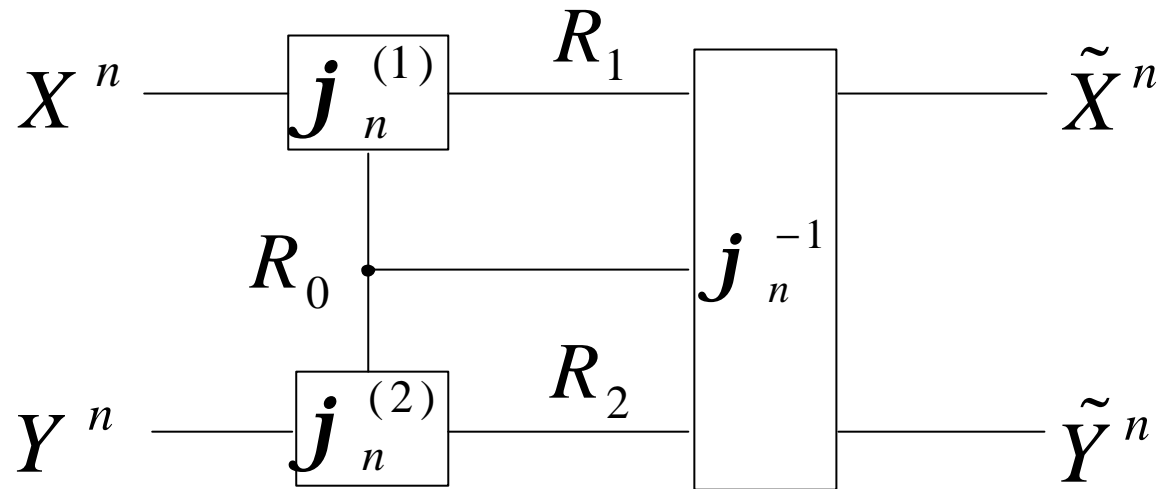


- 相関情報を有効に利用
- 独立に符号化・復号化を行う場合に比べ、より小さい符号化率が達成可能

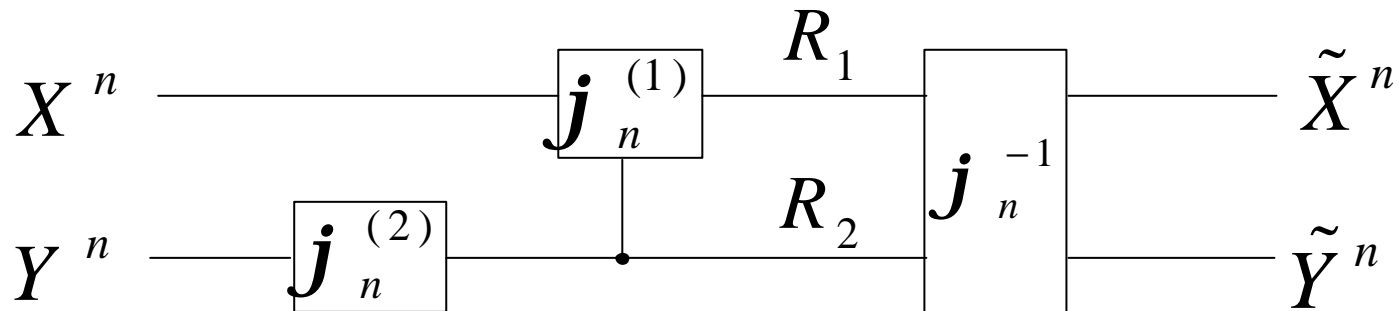


# Introduction (2)

- Kaspi and Berger (1982)

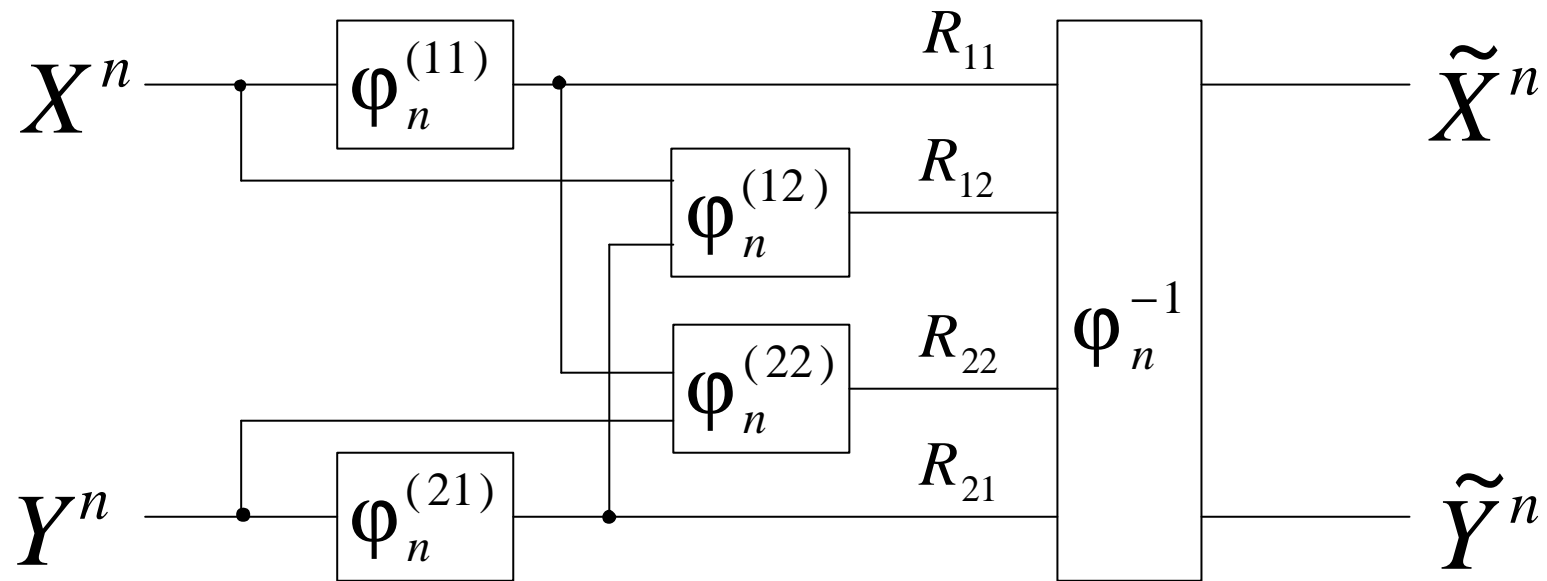


- Ericson and Korner (1983)



# Introduction (3)

- Oohama (1996)



# Introduction (4)

- 様々な多入力多出力情報伝送モデルの考察

Slepian-Wolf (1973), Kaspi-Berger (1982),  
Ericson-Korner (1983), Oohama (1996) etc.

⇒ いずれも固定長符号化・DM Sに対する解析

- 誤りなし可変長符号化を行った際の性能評価は困難 組み合わせ論
- 一般情報源に対する解析手法の不足

- 確率分布のみによって符号化の限界を決定するには？

- vanishing error を許した可変長符号化 (弱可変長符号化)

- 一般情報源に対する解析手法の発展

- 情報スペクトル的方法 (Han and Verdu (1993), 韓 (1998) )etc.

⇒ 混合情報源に対して弱可変長符号化を行った際の符号化率の限界及びその限界を達成する方法について考察

# Basic Definitions (1)

$X, Y$  :有限もしくは可算無限アルファベット  
 $B = \{0, 1\}$  :2元アルファベット  
 $B^*$  :  $B$  の有限文字列全体

- Correlated Ergodic Source  $(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \{(X_j, Y_j)\}_{j=1}^{\infty}$ 
  - 定常かつエルゴードな確率過程として定義
  - 確率変数  $(X_j, Y_j) \in X \times Y$  ( $j = 1, 2, \dots$ )
  - $\mathbf{X} = \{X_j\}_{j=1}^{\infty}$ ,  $\mathbf{Y} = \{Y_j\}_{j=1}^{\infty}$  :Ergodic Sources
- Correlated Mixed Source  $(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \{(X_j, Y_j)\}_{j=1}^{\infty}$ 
  - 以下の分布によって定義
  - $P_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{a} P_n^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + (1 - \mathbf{a}) P_n^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad \forall (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in X^n \times Y^n$
  - $P_n^{(i)}$  :Correlated Ergodic Source  $(\mathbf{X}_{(i)}, \mathbf{Y}_{(i)}) = \{(X_{(i)j}, Y_{(i)j})\}_{j=1}^{\infty}$  の分布
  - $0 < \mathbf{a} < 1$  :定数

## Basic Definitions (2)

- Entropy Rate

$$\begin{aligned} H(\mathbf{X}) &\stackrel{\Delta}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H(X^n) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H(X_1, X_2, \dots, X_n) \end{aligned}$$

- Joint Entropy Rate

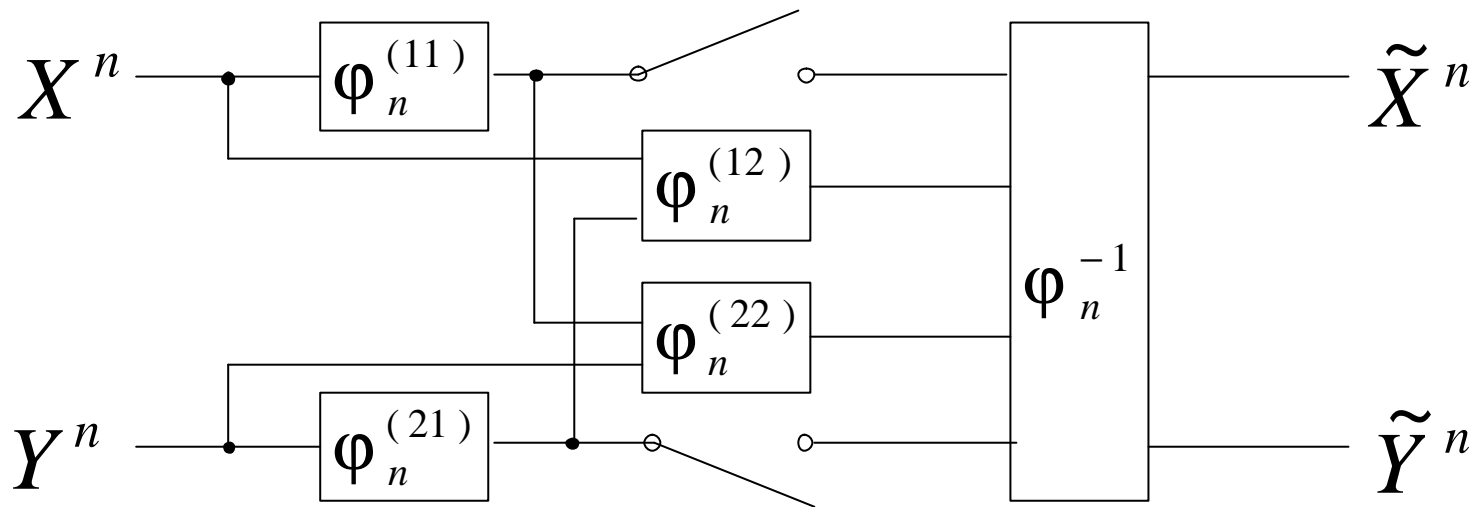
$$\begin{aligned} H(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) &\stackrel{\Delta}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H(X^n, Y^n) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H(X_1, X_2, \dots, X_n, Y_1, Y_2, \dots, Y_n) \end{aligned}$$

- Conditional Entropy Rate

$$\begin{aligned} H(\mathbf{X} | \mathbf{Y}) &\stackrel{\Delta}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H(X^n | Y^n) \\ H(\mathbf{Y} | \mathbf{X}) &\stackrel{\Delta}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H(Y^n | X^n) \end{aligned}$$

# Coding Systems for Correlated Sources (1)

- Weak variable-length Slepian-Wolf code with linked encoders  
(弱可変長 SW L符号)



符号器：  
 $\mathbf{j}_n^{(11)} : X^n \rightarrow B^*$ ,  $\mathbf{j}_n^{(21)} : Y^n \rightarrow B^*$ ,  
 $\mathbf{j}_n^{(12)} : X^n \times \mathbf{j}_n^{(21)}(Y^n) \rightarrow B^*$ ,  $\mathbf{j}_n^{(22)} : Y^n \times \mathbf{j}_n^{(11)}(X^n) \rightarrow B^*$

The images of  $\varphi_n^{(11)}$ ,  $\varphi_n^{(21)}$ ,  $\varphi_n^{(12)}$ ,  $\varphi_n^{(22)}$  are all prefix sets

# Coding Systems for Correlated Sources (2)

- < SWL-I code >

復号器  $\mathbf{j}_n^{-1} : B^* \times B^* \times B^* \times B^* \rightarrow X^n \times Y^n$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Pr \left\{ \mathbf{j}_n^{-1} \left( \mathbf{j}_n^{(11)}(X^n), \mathbf{j}_n^{(12)}(X^n), \mathbf{j}_n^{(21)}(Y^n) \right), \right.$$

$$\left. \mathbf{j}_n^{(21)}(Y^n), \mathbf{j}_n^{(22)}(Y^n, \mathbf{j}_n^{(11)}(X^n)) \right\} \neq (X^n, Y^n) \} = 0$$

- < SWL-II code >

復号器  $\mathbf{j}_n^{-1} : B^* \times B^* \rightarrow X^n \times Y^n$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Pr \left\{ \mathbf{j}_n^{-1} \left( \mathbf{j}_n^{(12)}(X^n), \mathbf{j}_n^{(21)}(Y^n) \right), \right.$$

$$\left. \mathbf{j}_n^{(22)}(Y^n, \mathbf{j}_n^{(11)}(X^n)) \right\} \neq (X^n, Y^n) \} = 0$$

# Coding Systems for Correlated Sources (3)

- 達成可能な弱可変長 SW L - I(SW L - II)レート

$(R_1, R_2)$  が達成可能な弱可変長 SW L - I(SW L - II)レート

$\Leftrightarrow$  以下の条件を同時に満たす弱可変長 SW L - I(SW L - II)符号

$\{(\varphi_n^{(11)}, \varphi_n^{(12)}, \varphi_n^{(21)}, \varphi_n^{(22)}, \varphi_n^{-1})\}_{n=1}^{\infty}$  が存在する。

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} E [l(\varphi_n^{(11)}(X^n))] = 0, \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} E [l(\varphi_n^{(21)}(Y^n))] = 0$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} E [l(\varphi_n^{(12)}(X^n, \varphi_n^{(21)}(Y^n)))] \leq R_1$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} E [l(\varphi_n^{(22)}(Y^n, \varphi_n^{(11)}(X^n)))] \leq R_2$$

(ただし、 $E[\cdot]$  : 期待値、 $l(\cdot)$  : 長さ関数)

# Coding Systems for Correlated Sources (4)

- 達成可能な弱可変長 SW L - I (SW L - II) レート領域

$$R_{SWL-I}^*(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \{(R_1, R_2) \mid (R_1, R_2) \text{ が達成可能な弱可変長 SW L - I レート}\}$$

$$R_{SWL-II}^*(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \{(R_1, R_2) \mid (R_1, R_2) \text{ が達成可能な弱可変長 SW L - II レート}\}$$

# Main Results (1)

•

Assumption:

Correlated Mixed Source  $(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$  は、

$$(1) \quad H(X_{(1)1}, Y_{(1)1}) < \infty, \quad H(X_{(2)1}, Y_{(2)1}) < \infty$$

及び以下の条件 (2) - (4) のうち少なくとも1つを満たすとする。

$$(2) \quad H(\mathbf{X}_{(1)}) \neq H(\mathbf{X}_{(2)})$$

$$(3) \quad H(\mathbf{Y}_{(1)}) \neq H(\mathbf{Y}_{(2)})$$

$$(4) \quad H(\mathbf{X}_{(1)}, \mathbf{Y}_{(1)}) \neq H(\mathbf{X}_{(2)}, \mathbf{Y}_{(2)})$$

## Main Results (2)

•Theorem 2:

$(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$  が Assumption を満たす Correlated Mixed Source ならば

$$R_{SWL-I}^*(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \left\{ (R_1, R_2) : \right. \\ R_1 \geq \mathbf{a} H(\mathbf{X}_{(1)} | \mathbf{Y}_{(1)}) + (1 - \mathbf{a}) H(\mathbf{X}_{(2)} | \mathbf{Y}_{(2)}), \\ R_2 \geq \mathbf{a} H(\mathbf{Y}_{(1)} | \mathbf{X}_{(1)}) + (1 - \mathbf{a}) H(\mathbf{Y}_{(2)} | \mathbf{X}_{(2)}), \\ \left. R_1 + R_2 \geq \mathbf{a} H(\mathbf{X}_{(1)}, \mathbf{Y}_{(1)}) + (1 - \mathbf{a}) H(\mathbf{X}_{(2)}, \mathbf{Y}_{(2)}) \right\}$$

Miyake-Kanaya (1995) および Theorem 2 より

$R_{SWL-I}^*(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \supset R_{SW}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$  であることがわかる。

# Examples (1)

- 例 1

$(\mathbf{X}_{(1)}, \mathbf{Y}_{(1)})$	0	1
0	$\frac{1}{2}$	0
1	0	$\frac{1}{2}$

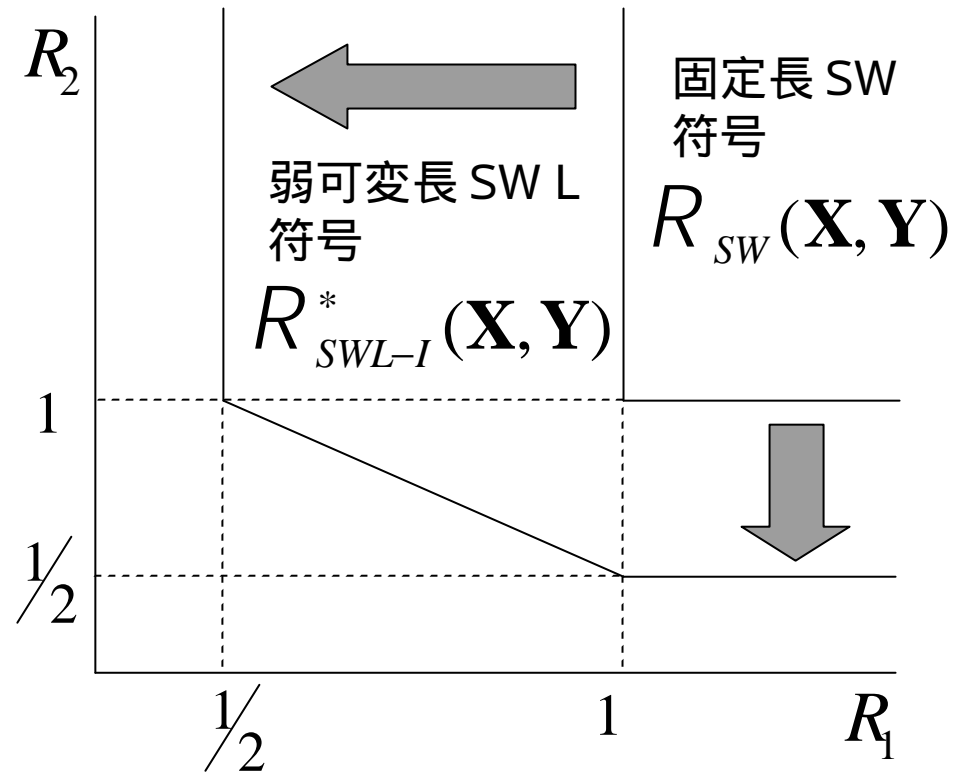
$(\mathbf{X}_{(2)}, \mathbf{Y}_{(2)})$	0	1
0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

$$\alpha = \frac{1}{2}$$

$$H(\mathbf{X}_{(1)}) = H(\mathbf{X}_{(2)}) = H(\mathbf{Y}_{(1)}) = H(\mathbf{Y}_{(2)}) = 1,$$

$$H(\mathbf{X}_{(1)} | \mathbf{Y}_{(1)}) = H(\mathbf{Y}_{(1)} | \mathbf{X}_{(1)}) = 0, \quad H(\mathbf{X}_{(2)} | \mathbf{Y}_{(2)}) = H(\mathbf{Y}_{(2)} | \mathbf{X}_{(2)}) = 1,$$

$$H(\mathbf{X}_{(1)}, \mathbf{Y}_{(1)}) = 1, \quad H(\mathbf{X}_{(2)}, \mathbf{Y}_{(2)}) = 2$$

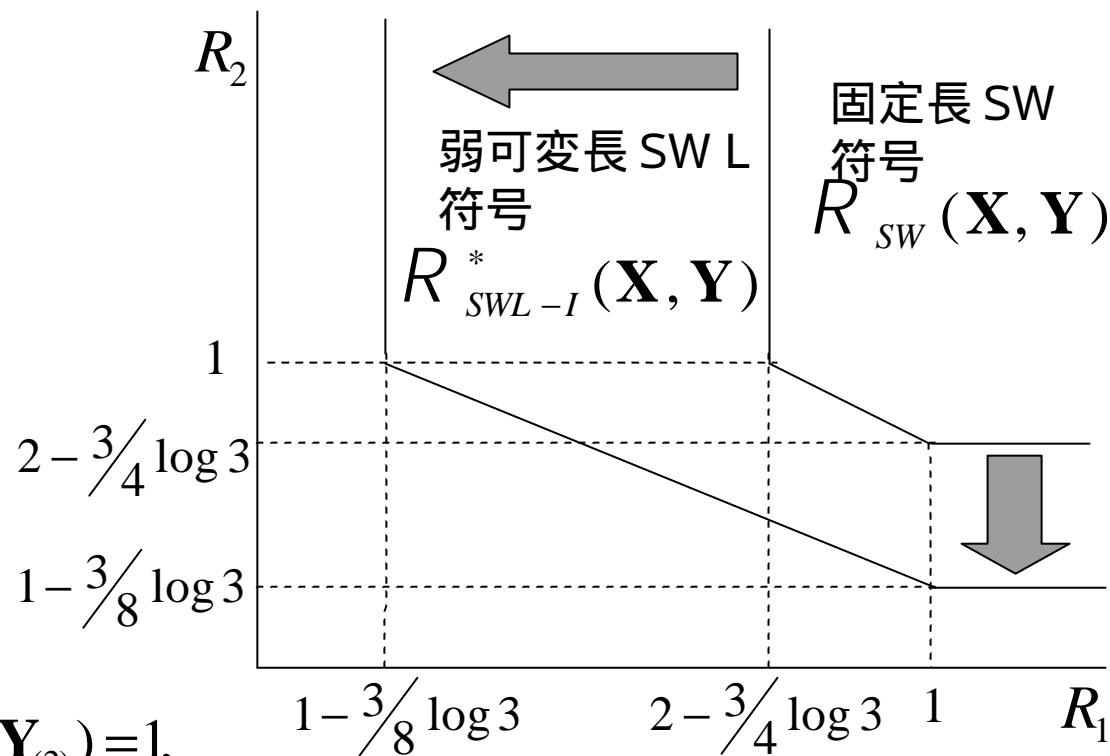


# Examples (2)

- 例 2

$(\mathbf{X}_{(1)}, \mathbf{Y}_{(1)})$	0	1
0	$\frac{1}{2}$	0
1	0	$\frac{1}{2}$
$(\mathbf{X}_{(2)}, \mathbf{Y}_{(2)})$	0	1
0	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$
1	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$

$$\alpha = \frac{1}{2}$$



$$H(\mathbf{X}_{(1)}) = H(\mathbf{X}_{(2)}) = H(\mathbf{Y}_{(1)}) = H(\mathbf{Y}_{(2)}) = 1,$$

$$H(\mathbf{X}_{(1)} | \mathbf{Y}_{(1)}) = H(\mathbf{Y}_{(1)} | \mathbf{X}_{(1)}) = 0, \quad H(\mathbf{X}_{(2)} | \mathbf{Y}_{(2)}) = H(\mathbf{Y}_{(2)} | \mathbf{X}_{(2)}) = 2 - \frac{3}{4} \log 3,$$

$$H(\mathbf{X}_{(1)}, \mathbf{Y}_{(1)}) = 1, \quad H(\mathbf{X}_{(2)}, \mathbf{Y}_{(2)}) = 3 - \frac{3}{4} \log 3$$

## Main Results (3)

Theorem 2 において  $\alpha = 0, 1$  とすることで、次の結果を得る。

- Corollary 2:

$(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$  が Correlated Ergodic Source ならば、

$$R_{SWL-I}^*(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \left\{ (R_1, R_2) : \begin{array}{l} R_1 \geq H(\mathbf{X}|\mathbf{Y}), \\ R_2 \geq H(\mathbf{Y}|\mathbf{X}), \\ R_1 + R_2 \geq H(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \end{array} \right\}$$

Corollary 1 および Corollary 2 より

$R_{SWL-I}^*(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = R_{SW}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$  であることがわかる。

# Main Results (4)

Theorem 2 と同様の証明によって、次の結果を得る。

- Corollary 3:

$(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$  が Assumption を満たす Correlated Mixed Source ならば、

$$\begin{aligned} R_{SWL-II}^* (\mathbf{X}, \mathbf{Y}) &= R_{SWL-I}^* (\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \{ (R_1, R_2) : \\ &R_1 \geq \mathbf{a} H(\mathbf{X}_{(1)} | \mathbf{Y}_{(1)}) + (1 - \mathbf{a}) H(\mathbf{X}_{(2)} | \mathbf{Y}_{(2)}), \\ &R_2 \geq \mathbf{a} H(\mathbf{Y}_{(1)} | \mathbf{X}_{(1)}) + (1 - \mathbf{a}) H(\mathbf{Y}_{(2)} | \mathbf{X}_{(2)}), \\ &R_1 + R_2 \geq \mathbf{a} H(\mathbf{X}_{(1)}, \mathbf{Y}_{(1)}) + (1 - \mathbf{a}) H(\mathbf{X}_{(2)}, \mathbf{Y}_{(2)}) \} \} \end{aligned}$$

# Future Reserches

- 弱可変長 SW符号化  
(符号器に関連がない場合)についての解析
- 対象とする情報源の一般化
- 歪みを許した符号化についての解析 etc.